SPINEURS ET VARIÉTÉS DE HODGE

ANDREI MOROIANU

Soit N une variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière. Le quotient M de N par l'action de S^1 correspondante - avec la métrique qui fait de la projection $N \to M$ une submersion riemannienne - est une variété de Hodge, c.à.d. une variété kählérienne compacte dont la classe de cohomologie de la forme de Kähler est un multiple réel d'une classe entière. Réciproquement, au-dessus de toute variété de Hodge M il existe un fibré en cercles N qui admet une métrique riemannienne et une structure de Sasaki régulière, tel que la projection $N \to M$ est une submersion riemannienne. Etant donné une submersion riemannienne $N \to M$ à fibres S^1, on a introduit dans [2] la notion de spineur projetable sur N (dans le cas où M est spinorielle), et on a vu que l'espace des spineurs projetables est invariant par l'opérateur de Dirac sur N. Le but de ce papier est de relier le spectre de l'opérateur de Dirac sur M, au spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur N, dans le cas où M est une variété de Hodge et N le fibré en cercles décrit ci-dessus.

Classification AMS : 53A50, 53C25, 53C55, 53C80.

1. PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

Soit (M^n, g) une variété spinorielle compacte et ∇ la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita de M agissant, selon le cas, sur le fibré tangent TM, sur le fibré des formes extérieures Λ^*M ou sur le fibré des spineurs complexes ΣM. L'*opérateur de Dirac* D (agissant sur les sections de ΣM) est défini comme la composition de la dérivée covariante et de la multiplication de Clifford. L'opérateur de Dirac est elliptique auto-adjoit d'ordre un et il est - avec l'opérateur des twisteurs - le seul opérateur universel d'ordre un sur les champs de spineurs. La théorie générale des opérateurs elliptiques nous assure que son spectre est discret et les multiplicités des valeurs propres sont finies, mais les relations entre le spectre de D et la géométrie de M ne sont que très peu connues jusqu'à présent.

Nous étudions ici le spectre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes (M^{2m}, g, J), par le biais des *spineurs projetables*. Afin de pouvoir appliquer cette notion (introduite dans [2]), on doit poser une certaine condition d'intégralité sur la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M, qui va nous permettre de construire de manière canonique une certaine variété au-dessus de M (section 3 ci-dessous).

Dans le cas kählérien il existe un autre opérateur universel agissant sur les champs de spineurs, $\tilde{D}$, qui fait intervenir la structure complexe de la variété. Dans une base locale orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de TM $(n = 2m)$, l'opérateur de

Dirac, D, et l'opérateur de Dirac "tordu" par J, $\tilde{D}$, s'écrivent

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}, \quad \tilde{D} = \sum_{i=1}^{n} J(e_i) \cdot \nabla_{e_i} = -\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{J(e_i)}.$$

Ils vérifient les relations

$$\tilde{D}^2 = D^2 \quad \text{et} \quad \tilde{D}D + D\tilde{D} = 0.$$

La forme de Kähler Ω est définie par $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$. L'action de Ω sur ΣM donne une décomposition en somme directe (cf. [1])

$$\Sigma M = \oplus_{r=0}^{m} \Sigma^r M,$$

où $\Sigma^r M$ est le fibré propre de rang C_m^r associé à la valeur propre $i\,\mu_r = i\,(m - 2\,r)$ de Ω. Par rapport à cette décomposition, tout spineur Ψ s'écrit de manière unique comme

$$\Psi = \sum_{r=0}^{m} \Psi^r.$$

On vérifie sans difficulté les relations

$$[\Omega, D] = -2\,\tilde{D}\ ,\ [\Omega, \tilde{D}] = 2\,D\ ,\ [\Omega, D^2] = 0. \tag{1}$$

Suivant O'Neill ([3]), on définit pour toute submersion riemannienne $\pi : N \to M$, les tenseurs fondamentaux A et T sur N par

$$T_X Y = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{H}Y + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y,$$

$$A_X Y = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{H}Y + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{V}Y,$$

où ∇ est la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita sur N et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ sont les projections de TN sur π^*TM et sur son complémentaire orthogonal respectivement.

Dans le cas où la fibre est de dimension 1 et M et N sont orientées, la submersion est totalement géodésique si et seulement si $\nabla_V V = 0$, où V est le champ unitaire vertical compatible avec les orientations.

On conclut cette section introductive avec la définition suivante

Définition 1. *Un champ vectoriel X sur une variété riemannienne (M, g) est une structure de Sasaki si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. X est un champ vectoriel de Killing de longueur constante 1;

2. Le tenseur φ de type (1,1) défini par $\varphi = -\nabla X$ est une structure presque complexe sur la distribution orthogonale à X ($\varphi^2 = -1$ et $\varphi = -\varphi^*$ sur $X^\perp$);

3. $(\nabla_V \varphi)W = g(V,W)\,X - g(X,W)\,V, \qquad \forall\, U\,,\, V\ .$

2. LES OPÉRATEURS D_+ ET D_-

Les résultats de cette section sont valables pour toute variété kählérienne compacte M. Considérons la décomposition de chiralité $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$. Si, par rapport à cette décomposition, Ψ s'écrit $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, on définit le conjugué de Ψ par la formule $\bar{\Psi} = \Psi_+ - \Psi_-$. Soit T l'opération de conjugaison: $T(\Psi) = \bar{\Psi}$. On introduit les opérateurs fondamentaux D_+ et D_- par

$$D_+ = D + i\,\tilde{D} \circ T \qquad , \qquad D_- = D - i\,\tilde{D} \circ T.$$

Lemme 1. *Les opérateurs D_+ et D_- commutent avec D et $\tilde{D}$, anticommutent avec T, et ont les propriétés suivantes*

$$D_+ \circ D_- = D_- \circ D_+ = 0 \;;\; D_+^2 = 2D_+ \circ D \;;\; D_-^2 = 2D_- \circ D, \tag{2}$$

$$D_+ \circ \Omega = \Omega \circ D_+ + 2\,i\;T \circ D_+ \;;\; D_- \circ \Omega = \Omega \circ D_- - 2\,i\;T \circ D_-. \tag{3}$$

Preuve. Les relations (2) se vérifient par calcul direct. Pour montrer (3) on utilise (1). ∎

Soit $\Sigma_0 M = \ker D = \ker D^2$ l'espace des spineurs harmoniques. On va noter par $\Gamma_0(\Sigma M)$ le complément orthogonal de $\Sigma_0 M$ dans $\Gamma(\Sigma M)$, et par $\Sigma_+ M$ et $\Sigma_- M$ les compléments orthogonaux de $\Sigma_0 M$ dans $\ker D_+$, respectivement $\ker D_-$.

Lemme 2. *On a une décomposition en somme directe $\Gamma_0(\Sigma M) = \Sigma_+ M \oplus \Sigma_- M$.*

Preuve. D'abord, $\Sigma_+ M \cap \Sigma_- M = \{0\}$, car il n'y a pas de spineur harmonique dans $\Gamma_0(\Sigma M)$. Soit $\Psi \in \Gamma_0(\Sigma M)$ un spineur et $\Phi \in \Gamma_0(\Sigma M)$ tel que $D(\Phi) = \Psi$. L'existence de Φ est garantie par le fait que D est un opérateur elliptique auto-adjoint, donc surjectif sur le complémentaire orthogonal de son noyau. Alors

$$\Psi = (\Psi - \frac{D_+ \Phi}{2}) + \frac{D_+ \Phi}{2},$$

et le lemme 1 montre que $(\Psi - \frac{D_+\Phi}{2}) \in Ker(D_+)$ et $\frac{D_+\Phi}{2} \in Ker(D_-)$. Il reste à remarquer que chacune de ces deux composantes de Ψ est orthogonale à $\ker D$. ∎

Lemme 3. *Les décompositions*

$$\Gamma(\Sigma M) = \Sigma_+ M \oplus \Sigma_- M \oplus \Sigma_0 M$$

et

$$\Gamma(\Sigma M) = \oplus_{r=0}^{m} \Gamma(\Sigma^r M)$$

sont compatibles, dans le sens que

$$\Gamma(\Sigma^r M) = (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_+ M) \oplus (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_- M)) \oplus (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_0 M).$$

Preuve. Soit $\Psi \in \Sigma^r M$. Il faut montrer que si $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$ avec $\Psi_0 \in \Sigma_0 M$, $\Psi_1 \in \Sigma_+ M$ et $\Psi_2 \in \Sigma_- M$, alors Ψ_0, Ψ_1, $\Psi_2 \in \Sigma^r M$. Tout d'abord, $\Psi_0 \in \Sigma^r M$ car Ω et D^2 commutent. Soit maintenant $\Phi \in (\ker D)^\perp$ tel que $D(\Phi) = \Psi_1 + \Psi_2$. On a vu que $\Psi_2 = D_+\Phi/2 = D\Phi/2 + i\tilde{D}\bar{\Phi}/2$, donc il suffit de vérifier que $\tilde{D}\Phi \in \Sigma^r M$, car le premier terme du dernier membre est égal à $(\Psi - \Psi_0)/2 \in \Sigma^r M$. En utilisant (1) et le fait que $D\Phi = \Psi - \Psi_0 \in \Sigma^r M$, on a

$$\begin{aligned} D(\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi) &= \Omega D\tilde{D}\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\ &= -\Omega\tilde{D}D\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\ &= -\tilde{D}\Omega D\Phi - 2D^2\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\ &= -i\mu_r\tilde{D}D\Phi - 2D^2\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi \in \ker D$. En même temps, $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi \in (\ker D)^\perp$, (car $\Phi \in (\ker D)^\perp$), donc $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi = 0$, c'est à dire, $\tilde{D}\Phi \in \Sigma^r M$. ∎

Définition 2. *On appelle* $\Sigma_0^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_0 M$, $\Sigma_+^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_+ M$ *et* $\Sigma_-^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_- M$.

Il est évident que les espaces $\Sigma_0^r M$, $\Sigma_+^r M$ et $\Sigma_-^r M$ sont invariants par D^2. Soient F_0^r, F_+^r et F_-^r les ensembles des valeurs propres de la restriction de D^2 à $\Sigma_0^r M$, $\Sigma_+^r M$ et $\Sigma_-^r M$, respectivement. Evidemment, $F_0^r = \{0\}$ ou $\emptyset$.

Lemme 4.

$$\mathrm{Spec}(D^2) = \cup_r (F_+^r \cup F_-^r \cup F_0^r).$$

Preuve. Soit Ψ un spineur propre non-nul de D^2 avec la valeur propre λ. Le fait que D^2 et Ω commutent montre qu'on peut supposer $\Psi \in \Gamma(\Sigma^r M)$ pour un certain r. Soit $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$ la décomposition de Ψ correspondante à la décomposition $\Sigma^r M = \Sigma_0^r M \oplus \Sigma_+^r M \oplus \Sigma_-^r M$. L'unicité de cette décomposition montre que $D^2\Psi_+ = \lambda\Psi_+$ et $D^2\Psi_- = \lambda\Psi_-$. Si au moins l'un des Ψ_+ et Ψ_- est non-nul, on a $\lambda \in F_+^r$, ou $\lambda \in F_-^r$. Sinon, $\lambda = 0$ et $F_0^r = \{0\}$. ∎

3. VARIÉTÉS DE SASAKI ET VARIÉTÉS DE HODGE

Dans cette section on décrit la correspondance bijective entre les variétés riemanniennes compactes admettant une structure de Sasaki régulière, et les variétés de Hodge.

Proposition 1. *Soit (N, g) une variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière notée V, et M l'ensemble des orbites de V. Alors M est une variété compacte admettant une métrique kählérienne, et la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M est multiple d'une classe entière.*

Preuve. Le fait que M est une variété est donné par la régularité de la structure de Sasaki. La compacité est évidente. Ensuite, pour $x \in M$, tout vecteur $X \in T_xM$ s'identifie d'une manière canonique à un champ de vecteurs X^* sur la fibre N_x satisfaisant les conditions

$$[X^*, V] = 0 \tag{4}$$

et

$$g(X^*, V) = 0 \tag{5}$$

On considère sur M la métrique $\tilde{g}$ définie par $\tilde{g}(X,Y) = g(X^*, Y^*)$. Le deuxième membre ne dépend pas du point de la fibre N_x où on se situe, car $V(g(X^*, Y^*)) = (\mathcal{L}_V g)(X^*, Y^*) + g([V, X^*], Y^*) + g(X^*, [V, Y^*]) = 0$, grace au fait que V est un champ de vecteurs de Killing. Evidemment, $\tilde{g}$ est l'unique métrique qui fait de la projection $N \to M$ une submersion riemannienne.

On définit une structure presque complexe J sur M par

$$J(X)^* = -\varphi(X^*).$$

J est bien défini car $\varphi(X^*)$ vérifie (5) grace à la condition 2 de la définition 1 et il vérifie (4) grace à la condition 3 de la même définition. La condition 2 de cette définition montre aussi que J est une structure presque complexe, et la condition 3 montre que J est parallèle. Enfin, l'intégrabilité de J, c'est à dire l'annulation du tenseur de Nijenhuis de J, est donnée par la condition 3 aussi.

M est donc une variété kählérienne. Pour vérifier la dernière affirmation de la proposition, considérons la S^1-fibration principale $N \to M$. La distribution orthogonale à V définit une connexion de cette fibration, avec la forme de connexion α et la forme de courbure F, et on voit facilement (voir la démonstration de la proposition suivante), que la forme de Kähler de M est un multiple réel de F, dont la classe de cohomologie est, évidement, entière. ■

Réciproquement, on a le résultat suivant

Proposition 2. *Pour toute variété de Hodge (M, g, J), il existe une S^1-fibration principale $N \to M$, une métrique riemannienne sur N, telle que la projection $N \to M$ soit une submersion riemannienne, et une structure de Sasaki régulière sur N. En plus, la variété kählérienne obtenue à partir de N donnée par la proposition précédente, est exactement M.*

Preuve. La condition sur la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M, Ω, assure l'existence d'une S^1-fibration principale $\pi : N \to M$ et d'une connexion dont la forme de courbure F satisfait

$$\pi^*\Omega = i\, r\, F \ , \ \ r \in \mathbf{R}.$$

Pour tout vecteur X sur M on note X^* le relevé horizontal de X par rapport à cette connexion. Soit σ l'action (libre) de S^1 sur N. La forme de connexion, α, induit une famille de métriques riemanniennes sur N qui font de π une submersion riemannienne : il suffit de définir

$$g_N^c(X,Y) = g(\pi_*(X), \pi_*(Y)) - c^2\,\alpha(X)\,\alpha(Y) \quad (c > 0),$$

via l'identification de $\mathcal{L}(S^1)$ avec $i\,\mathbf{R}$ qui fait correspondre $\frac{\partial}{\partial t}$ à i. Dans tout point $y \in N$, on note par V^c le vecteur unitaire dans y, défini par $V^c = (1/c)\sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})$. On a donc

$$\begin{aligned} F(X^*,Y^*) &= d\alpha(X^*,Y^*) \\ &= -\frac{1}{2}\,\alpha([X^*,Y^*]) \\ &= \frac{1}{2\,c\,i}\,g_N^c([X^*,Y^*],V^c), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \pi^*\Omega(X^*,Y^*) &= \frac{r}{2\,c}\,g_N^c([X^*,Y^*],V^c) \\ &= \frac{r}{c}\,A_{X^*}Y^* \\ &= \frac{r}{c}\,g_N^c(\nabla_{X^*}Y^*,V^c) \\ &= -\frac{r}{c}\,g_N^c(Y^*,\nabla_{X^*}V^c) \\ &= -\frac{r}{c}\,g(Y,\pi(A_{X^*}V^c)). \end{aligned}$$

Pour $c = r$, on obtient

$$\Omega(X,Y) = -g(Y,\pi(A_{X^*}V^r)),$$

qui donne

(6) $$A_{X^*}V^c = J(X)^*.$$

Soit $g_N = g_N^r$ et $V = V^r$. On montre à présent que la submersion $(N, g_N) \to M$ est à fibres totalement géodésiques. On a

$$0 = F(V,X^*) = d\alpha(V,X^*) = -\frac{1}{2}\,\alpha([V,X^*]),$$

donc $[V,X^*]$ est un champ horizontal pour tout champ vectoriel X sur M. En même temps, V est projetable sur 0 et X^* sur X, donc $[V,X^*]$ est projetable sur 0, c'est à dire il est vertical. On a montré que

(7) $$[V,X^*] = 0.$$

Du fait que $g_N(V,V)=1$ on voit que $g_N(V,\nabla_{X^*}V)=0$. Il en suit

$$0 = g_N(V, \nabla_V X^*) = g(\nabla_V V, X^*),$$

et donc $\nabla_V V = 0$, ce qui montre que la submersion π est à fibres totalement géodésiques.

Finalement, on montre que V satisfait les conditions 1-3 de la définition 1. La première condition suit facilement de (7). La deuxième exprime le fait que J est une structure presque complexe compatible avec la métrique de M: en effet, de l'équation (6) on a

$$\varphi(X^*) = -J(X)^*.$$

Enfin, la troixième condition est satisfaite grace au fait que $\nabla J = 0$. ■

Remarque 1. *La condition de Hodge sur M est automatiquement satisfaite dans le cas où la métrique serait de Kähler-Einstein. Dans ce cas-là, la construction qu'on vient de décrire est le pas décisif vers la classification des variétés admettant des spineurs de Killing kählériens (cf. [2]).*

4. SPINEURS PROJETABLES

Dans cette section on rappelle la définition et les propriétés des spineurs projetables, présentées dans [2]. Soit $N \to M$ une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, et ∇ et $\tilde{\nabla}$ les dérivées covariantes de M, respectivement N, étendues aux fibrés des spineurs, si ces derniers existent. En supposant que M et N sont orientables, on note par V le champ de vecteurs unitaires verticaux sur N compatible avec les orientations et par $\{X_i\}$ une base locale orthonormée orientée de TM. Pour tout champ de vecteurs X sur M on note par X^* son relevé horizontal à N. Pour simplifier les énoncés suivants, on va supposer maintenant que la dimension de M est paire (c'est le cas qui nous intéresse dans les sections suivantes). En dimension impaire les résultats restent vrais, mais avec des légères modifications.

Lemme 5.(cf. [2]). *Toute structure spinorielle sur M induit de manière canonique une structure spinorielle sur N. Tout champ spinoriel sur M induit un champ spinoriel sur N.*

Définition 3. *Les spineurs sur N ainsi obtenus s'appellent projetables.*

Tout spineur projetable $\tilde{\Psi}$ sur N induit un unique spineur Ψ sur M. On dit que $\tilde{\Psi}$ est projetable sur Ψ.

Proposition 3. *Soit $\tilde{\Phi}$ un spineur sur N, projetable sur Φ. Alors $\tilde{\nabla}_{X^*}\tilde{\Phi}$ est projetable sur*

$$\nabla_X\Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*}V)\cdot\bar{\Phi},$$

et $\tilde{\nabla}_V\tilde{\Phi}$ est projetable sur

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\pi_*(A_{X_j^*}V)\cdot X_j\cdot\Phi.$$

Les corrolaires suivants ne devraient donc pas surprendre:

Corollaire 1. *Un spineur $\tilde{\Psi}$ sur N est projetable si et seulement si*

$$\tilde{\nabla}_V\tilde{\Psi} = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(A_{X_j^*}V)\cdot X_j^*\cdot\tilde{\Psi}.$$

Corollaire 2. *Si D^N et D sont les opérateurs de Dirac sur N et M respectivement, alors pour tout spineur $\tilde{\Phi}$ projetable sur Φ, $D^N\tilde{\Phi}$ est projetable sur $D\Phi - \frac{1}{4}\, i\, \sum_{j=1}^{n} X_j\cdot\pi_*(A_{X_j^*}V)\cdot\bar{\Phi}$.*

5. LES RELATIONS ENTRE LES SPECTRES

Dorénavant, $N \to M$ désignera la submersion riemannienne décrite par les deux propositions de la section 3, et on suppose que M est spinorielle. Considérons une structure spinorielle sur M, qui induit, par le lemme 5, une structure spinorielle sur N. On note par D et $\hat{D}$ les opérateurs de Dirac sur M et N, et on identifie chaque spineur sur M avec le spineur projetable sur N qu'il induit. Avec cette identification, on a la relation suivante:

Lemme 6. *Les opérateurs D et $\hat{D}$ sont reliés par la formule*

$$\hat{D}^2\Psi = D^2\Psi + i\,\tilde{D}\bar{\Psi} - \frac{1}{4}\Omega^2\cdot\Psi. \tag{8}$$

Preuve. Le corollaire 2 et la formule (6) donnent

$$\hat{D}\Psi = D\Psi + \frac{1}{2} i\,\Omega\cdot\bar{\Psi}. \tag{9}$$

Si on remplace dans (9) Ψ par $D\Psi + (i/2)\,\Omega\cdot\bar{\Psi}$, et on utilise (1), on tire

$$\begin{aligned}\hat{D}^2\Psi &= D(D\Psi + \frac{1}{2} i\,\Omega\cdot\bar{\Psi}) + \frac{1}{2} i\,\Omega\cdot(-D\bar{\Psi} + \frac{1}{2} i\,\Omega\cdot\Psi)\\ &= D^2\Psi + \frac{1}{2} i\,(D(\Omega\cdot\bar{\Psi}) - \Omega\cdot D\bar{\Psi}) - \frac{1}{4}\Omega^2\cdot\Psi\\ &= D^2\Psi + i\,\tilde{D}\bar{\Psi} - \frac{1}{4}\Omega^2\cdot\Psi. \blacksquare\end{aligned}$$

On a vu dans la section 3 que

$$\mathrm{Spec}(D^2) = \cup_r (F_+^r \cup F_-^r \cup F_0^r),$$

et le spectre de D s'en déduit facilement, grace à la parité de la dimension de M. Soit $\lambda_+^r = \pm\sqrt{\alpha_+^r} \in \mathrm{Spec}(D)$, et $\Psi_+^r \in \Sigma_+^r M$ un spineur propre de D^2 avec la valeur propre α_+^r. Le lemme 6 et la définition de D_+ donnent

$$\left(\hat{D} + \frac{1}{2}\right)^2 \Psi_+^r = \left((\lambda_+^r)^2 + \left(\frac{\mu_r - \varepsilon}{2}\right)^2\right)\Psi_+^r,$$

où $\varepsilon = (-1)^r$. Donc $(\lambda_+^r)^2 + ((\mu_r - \varepsilon)/2)^2$ est une valeur propre de $(\hat{D} + 1/2)^2$.

Faisons ici une petite remarque évidente. Soit P un opérateur linéaire sur un espace vectoriel quelconque, et v un vecteur propre de P^2 avec la valeur propre λ^2; si $P(v) \pm \lambda v \neq 0$, alors λ et $-\lambda$ sont des valeurs propres de P.

On applique cette remarque pour $P = \hat{D} + (1/2)$, considéré comme opérateur sur l'espace vectoriel des spineurs sur M, et pour $v = \Psi_+^r$. Le spineur Ψ_+^r étant un spineur chiral pur et non-nul, on ne peut pas avoir $(\hat{D} + (1/2))\Psi_+^r = \lambda\Psi_+^r$, à cause du corollaire 2. On a donc trouvé

$$-(1/2) \pm \sqrt{(\lambda_+^r)^2 + ((\mu_r - \varepsilon)/2)^2}$$

comme valeurs propres de $\hat{D}$. D'une manière analogue, pour toute valeur propre $\lambda_-^r = \pm\sqrt{\alpha_-^r} \in \mathrm{Spec}(D)$, on trouve les valeurs propres

$$(1/2) \pm \sqrt{(\lambda_-^r)^2 + ((\mu_r + \varepsilon)/2)^2}$$

dans le spectre de $\hat{D}$ (où $\varepsilon = (-1)^r$). Enfin, pour tout r tel que $\Sigma_0^r M \neq \emptyset$, on trouve $\pm\mu_r/2$ comme valeurs propres de $\hat{D}$. On a donc démontré le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit M une variété de Hodge spinorielle munie d'une métrique kählérienne, et N la variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière, qui correspond à M par la bijection définie dans la section 4. Alors N a une structure spinorielle provenant canoniquement de celle de M, et si le spectre du carré de l'opérateur de Dirac sur M est donné par les familles F_0^r F_+^r et F_-^r décrites ci-dessus, alors le spectre de l'opérateur de Dirac sur N, restreint au spineurs projetables, est donné par les familles*

$$\pm\frac{1}{2}\mu_r \quad , \quad si\ F_0^r \neq \emptyset,$$

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\lambda_+^r)^2 + \left(\frac{\mu_r - \varepsilon}{2}\right)^2} \quad , \quad (\lambda_+^r)^2 \in F_+^r,$$

et

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\lambda_-^r)^2 + \left(\frac{\mu_r + \varepsilon}{2}\right)^2} \quad , \quad (\lambda_-^r)^2 \in F_-^r,$$

où $\varepsilon = (-1)^r$.

6. REMARQUES ET APPLICATIONS

1. Dans le cas où m est impair, il existe (cf. [1]) une application canonique anti-unitaire de fibrés, $j : \Sigma M \to \Sigma M$, qui est une structure réelle ($j^2 = id$), qui commute avec D et $\tilde{D}$, et que définit un isomorphisme $\Sigma^r M \to \Sigma^{m-r} M$ pour chaque r. Ceci montre que j anticommute avec la conjugaison T, donc $D_+ \circ j = j \circ D_-$ et $D_- \circ j = j \circ D_+$. Par conséquent, tout spineur propre de D^2, $\Psi_+^r \in \Gamma(\Sigma_+^r M)$, induit un spineur propre de D^2, $\Psi_-^{m-r} \in \Gamma(\Sigma_-^{m-r} M)$, avec la même valeur propre, et réciproquement. On a donc $F_+^r = F_-^{m-r}$. Pour r pair on va noter $S^r = F_+^r$ et $T^r = F_-^r$ et pour r impair on va noter $S^r = F_-^r$ et $T^r = F_+^r$. On a toujours

$$\mathrm{Spec}(D^2) = \cup_r (S^r \cup T^r),$$

et le raisonnement qu'on vient de faire montre que cette fois-ci, le spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur N est donné par les familles

$$\pm\frac{1}{2}\mu_r \quad , \quad \text{si } F_0^r \neq \emptyset, \tag{10}$$

$$\pm\frac{1}{2} \pm \sqrt{\nu^r + \left(\frac{\mu_r - 1}{2}\right)^2} \quad , \quad \nu^r \in S^r, \tag{11}$$

et

$$\pm\frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda^r + \left(\frac{\mu_r + 1}{2}\right)^2} \quad , \quad \lambda^r \in T^r. \tag{12}$$

L'avantage de cette écriture est que la parité de r n'intervient plus. On remarque que S^m et T^0 sont vides.

2. Récemment, dans [4], S. Seifarth et U. Semmelmann ont calculé le spectre de l'opérateur de Dirac sur l'espace projectif complexe de dimension complexe impaire $m = 2k + 1$. Ils trouvent deux familles de valeurs propres de D sur $(\mathbf{C}\mathrm{P}^m, g^{F-S})$, $\pm\sqrt{\lambda_{l,r}}$ et $\pm\sqrt{\nu_{l,r}}$, où

$$\lambda_{l,r} = \left(l + \frac{m-1}{2}\right)\left(l + \frac{m-1}{2} + \frac{\mu_r + 1}{2}\right),$$

$$r \in \{1, \ldots, m\} \text{ et } l \geq \max\{1, r - \frac{m-1}{2}\}$$

$$\nu_{l,r} = \left(l + \frac{m+1}{2}\right)\left(l + \frac{m+1}{2} + \frac{\mu_r - 1}{2}\right),$$

$$r \in \{0, \ldots, m-1\} \text{ et } l \geq \max\{0, r - \frac{m-1}{2}\}.$$

(On a noté par g^{F-S} la métrique de Fubini-Study, dont la courbure scalaire est $m(m+1)$).

En utilisant ce résultat on va maintenant donner une application du théorème 1 concernant les spineurs projetables de la sphère de dimension $4\,k+3$. Considérons la sphère (S^{2m+1}, can) $(m = 2\,k+1)$, avec la métrique canonique, qui admet, évidement, une structure de Sasaki projetable. Il est facile de voir que la variété kählérienne qui lui correspond par la bijection décrite dans la section 4 est exactement $(\mathbf{C}\mathrm{P}^m, 4\,g^{F-S})$. En appliquant les résultats de S. Seifarth et U. Semmelmann, on trouve sans difficulté que les familles S^r et T^r décrites dans le paragraphe ci-dessus sont données par

$$S^r = \Big\{ 4\Big(l + \frac{m+1}{2}\Big)\Big(l + \frac{m+1}{2} + \frac{\mu_r - 1}{2}\Big),$$

$$r \in \{0, \ldots, m-1\} \text{ et } l \geq \max\{0, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\},$$

et

$$T^r = \Big\{ 4\Big(l + \frac{m-1}{2}\Big)\Big(l + \frac{m-1}{2} + \frac{\mu_r + 1}{2}\Big),$$

$$r \in \{1, \ldots, m\} \text{ et } l \geq \max\{1, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\}.$$

Les formules (11) et (12) montrent alors que le spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur la sphère (S^{2m+1}, can) est donné par les familles

$$\Big\{ \pm \frac{1}{2} \pm (2\,l + m + 1 - r + \frac{m-1}{2}),$$

$$r \in \{0, \ldots, m-1\} \text{ et } l \geq \max\{0, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\},$$

et

$$\Big\{ \pm \frac{1}{2} \pm (2\,l + m - 1 - r + \frac{m+1}{2}),$$

$$r \in \{1, \ldots, m\} \text{ et } l \geq \max\{1, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\}.$$

On trouve donc

$$\Big\{ \pm \Big(\frac{2\,m+1}{2} + k\Big)\ ,\ k \geq 0 \Big\},$$

comme valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur la sphère (S^{2m+1}, can), donc, en synthétisant, on a le résultat suivant:

Corollaire 3. *Dans chaque espace propre de l'opérateur de Dirac sur la sphère de dimension $4\,k+3$ il existe un spineur propre projetable.*

Remerciements. Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Jean Pierre Bourguignon, qui m'a posé le problème traité dans cet article.

RÉFÉRENCES

[1] K.-D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature.* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.

[2] A. Moroianu, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes.* Commun. Math. Phys., **169** (1995), 373-384.

[3] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion.* Mich. Math J. **13** (1966), 459-469.

[4] S. Seifarth et U. Semmelmann, *The spectrum of the Dirac operator on the complex projective space* $P_{2q-1}(\mathbf{C})$. Preprint, SFB 288, (1993).

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
Palaiseau, URA 169 du CNRS
et
Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine,
Bucarest, Roumanie